ΘΕΜΑ 9

Βρείτε τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f(x,y)=x^4+y^3-6x^2y$$

Λύση

Εχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3-12xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2-6x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2-12y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12x$$

Λύνουμε το σύστημα $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ή

$$\left.\begin{array}{l} 4x(x^2-3y) = 0 \\ 3y^2 = 6x^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{l} x^2 = 3y \\ |y| = \sqrt{2}|x| \end{array}$$

Επειδή $x^2 \geq 0$, έχουμε $y>0$ οπότε $y=\sqrt{2}|x|$ και η πρώτη γίνεται $x^2=3\sqrt{2}|x| \Leftrightarrow$ $x=0$ ή $x=\pm 3\sqrt{2}$. Αρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα σημεία

$$(0,0), \quad (-3\sqrt{2},6), \quad (3\sqrt{2},6)$$

Για την ορίζουσα Δ έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12(x^2-y) & -12x \\ -12x & 6y \end{vmatrix} = 72(x^2-y)y-144x^2$$

Στα σημεία $(-3\sqrt{2},6)$ και $(3\sqrt{2},6)$ η πιό πάνω ορίζουσα είναι θετική. Επίσης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 3\sqrt{2},6) = 12\left((3\sqrt{2})^2-6\right) > 0$$

Αρα η f στα σημεία $(\pm 3\sqrt{2},6)$ έχει τοπικά ελάχιστα

Στο σημείο (0,0) ισχύει $\Delta=0$, οπότε εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς $A=f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)$. Για $y=\lambda x$ έχουμε :

$$f(x,\lambda x) = x^4+\lambda^3x^3-6x^3\lambda = x^3(x+\lambda^3-6\lambda)$$

Εστω $\lambda=1$, τότε $f(x,x)=x^3(x-5)$. Για μικρά x (γύρω από το 0) ισχύει $x-5<0$. Επομένως αν $x>0$ θα έχουμε $f(x,x)<0$ και αν $x<0$ θα έχουμε $f(x,x)>0$. Συνεπώς το (0,0) δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για την f.